Prueba N^o 1

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1+\dfrac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

---

1) **[20 pts]** Considere $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{|x|+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

   a) **[5 pts]** Determine si f es continua en $(0,0)$.

   Ayuda: Considere que $|a^3-b^3| \leq |a^3|+|b^3|$

   b) **[10 pts]** Decida si f es diferenciable en $(0,0)$.

   c) **[5 pts]** Hallar la derivada parcial $f_x(0,1)$, si es que existe.

   Ayuda: Analice el límite cuando h tiende a $0^{\pm}$

2) **[20 pts]** Decida si $z = x^2 f(y^2)$ con $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, verifica la ecuación diferencial

$$x^2\frac{\partial^4 z}{\partial y^2 \partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x$$

   Ayuda: $\dfrac{\partial^4 z}{\partial y^2 \partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\right)$

3) **[20 pts]** Encuentre los extremos absolutos de $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3x+4y-3$ sobre el círculo $\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2+y^2 \leq 25\}$

   Ayuda: Busque puntos críticos en el interior de D, si es que existen y en el borde de $\mathcal{D}$.

Pauta :

1) *a)* $|f(x,y)| = \dfrac{|x^3-y^3|}{|x|+y^2} \le \dfrac{|x^3|+|y^3|}{|x|+y^2} = \dfrac{|x^3|}{|x|+y^2} + \dfrac{|y^3|}{|x|+y^2} \le x^2+|y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

Por lo tanto, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Luego f es continua en $(0,0)$

b)

- $f_x(0,0) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h|h|} = \lim_{h\to 0}|h| = 0$
- $f_y(0,0) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h^3}{h^3} = -1$
- $$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k-f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3-k^3}{|h|+k^2}+k}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ &= \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h=k^2}} \frac{k|h|+h^3}{(|h|+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}\\ &= \lim_{k\to 0^+}\frac{k^3+k^6}{2k^2\sqrt{k^2(k^2+1)}}\\ &= \lim_{k\to 0^+}\frac{1+k^3}{2\sqrt{k^2+1}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Luego, f no es diferenciable en $(0,0)$.

c)

- $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h,1)-f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{h^3-1}{|h|+1}+1}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{|h|+h^3}{h(|h|+1)} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1+h^2}{h+1} = 1$
- $\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h,1)-f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{|h|(1+h|h|)}{h(|h|+1)} = -\lim_{h\to 0^-}\frac{1-h^2}{1-h} = -1$

Por lo tanto. $f_x(0,1)$ no existe.

2)

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xf(y^2)$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f(y^2)$
- $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2} = 4yf'(y^2)$
- $\dfrac{\partial^4 z}{\partial y^2\partial x^2} = 4f'(y^2)+8y^2f'(y^2)$
- $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^2yf'(y^2)$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2f'(y^2)+4x^2y^2f'(y^2)$

Reemplazando en la ecuación dada:

$$x^2\frac{\partial^4 z}{\partial y^2\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2\left(4f'(y^2)+8y^2f'(y^2)\right) - 2\left(2x^2f'(y^2)+4x^2y^2f'(y^2)\right) = 0 \neq x$$

Por lo tanto, $z = x^2f(y^2)$ no es solución de la ecuación dada.

3) Consideremos $f(x,y) = 3x + 4y - 3$ (función) y $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 25$ (restricción)

- **Puntos en el interior a $\mathcal{D}$:** Resolviendo el sistema

$$(f_x(x,y), f_y(x,y)) = (0,0) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3 & = & 0 \\ 4 & = & 0 \end{array} \right.$$

No hay puntos críticos en el interior de D.

- **Puntos frontera a $\mathcal{D}$:** la circunferencia $(x-1)^2 + y^2 = 25$. usando Multiplicadores de Lagrange, obtenemos el sistema no lineal.

$$\begin{array}{rcll} 3 & = & 2\lambda(x-1) & (1) \\ 4 & = & 2\lambda y & (2) \\ (x-1)^2 + y^2 & = & 25 & (3) \end{array}$$

Para $\lambda \neq 0, x \neq 1$ e $y \neq 0$, resulta de (1) ó (2) que $\lambda = \dfrac{3}{2(x-1)} = \dfrac{2}{y} \Longrightarrow y = \dfrac{4}{3}(x-1)$

Reemplazando en (3) resulta que $(x-1)^2 = 9 \Longrightarrow x = -2$ o $x = 4$.

Luego los puntos críticos son: $P_1 = (-2,-4)$ y $P_2 = (4,4)$

Los valores de la función en los dos puntos obtenidos son:

- $f(P_1) = -25$
- $f(P_2) = 25$

En consecuencia, el máximo absoluto se alcanza en P_2, mientras que el mínimo absoluto se alcanza en P_1.